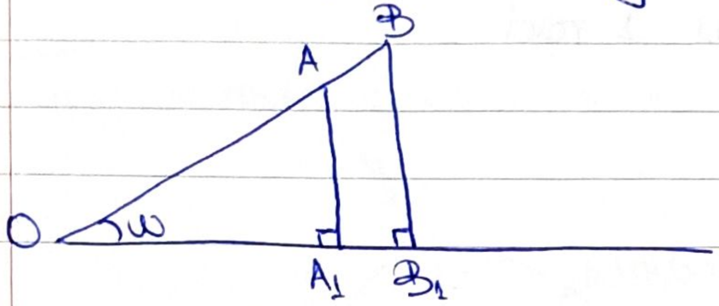
• Βιβλίο → Τσαλιάτος.

→ Τριγωνομετρία

ημ = ημίτονο = sinus = sin
συν = συνημίτονο = cosinus = cos
εφ = εφαπτομένη = tangent = tan
σφ = συνεφαπτομένη = cotangent = cot



Για οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου.

$$\sin(\omega) = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AA_1}{OA} = \frac{BB_1}{OB}$$

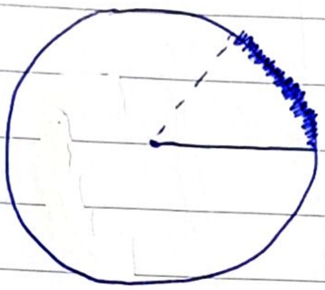
$$\cos(\omega) = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB}$$

$$\tan(\omega) = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{AA_1}{OA_1} = \frac{BB_1}{OB_1}$$

$$\cot(\omega) = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{OA_1}{AA_1} = \frac{OB_1}{BB_1}$$

→ Μέτρηση Γωνιών και Τόξων

~~Μοίρες~~ και rad (ακτίνια)



Τόξο 1 rad: Είναι ένα τόξο σε έναν κύκλο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

Αντίστοιχα, γωνία 1 rad είναι η γωνία που όταν γίνει επίκεντρη σε κύκλο το αντίστοιχο τόξο είναι 1 rad.

→ Πως σχετίζονται μοίρες και rad

Γωνία 2π rad $= 360^\circ$

Γωνία 1 rad $= \frac{360^\circ}{2\pi}$ μοίρες

Άρα γωνία α rad $= \frac{360}{2\pi} \cdot \alpha$ μοίρες

Συνεπώς αν μια γωνία είναι α rad και μ μοίρες τότε

$$\frac{180}{\pi} \cdot \alpha = \mu \Leftrightarrow \boxed{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}} \rightarrow \text{τύπος}$$

Μοίρες	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π

Χρησιμοποιούμε μόνο rad.

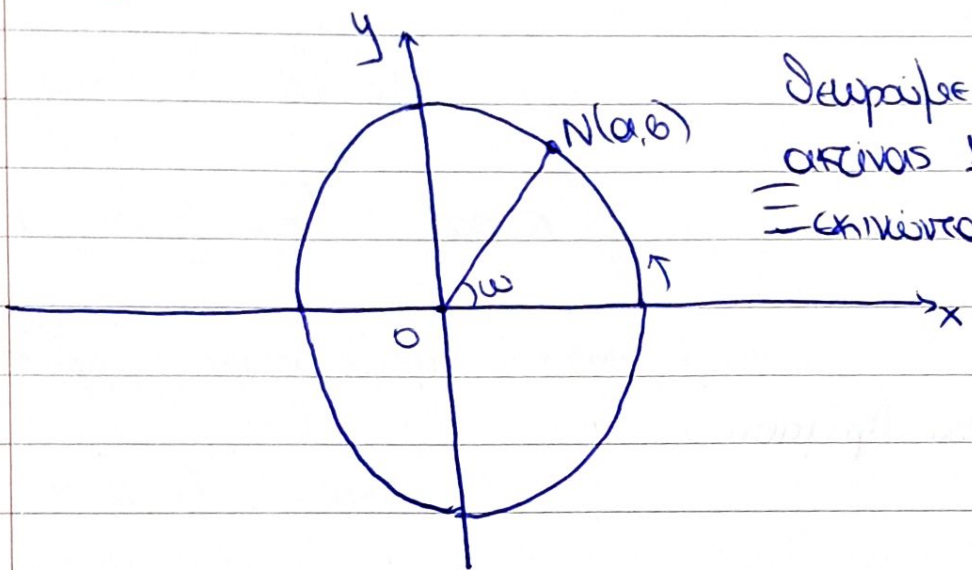
Όταν γράφουμε: $\sin(\omega)$ εννοούμε πάντα $\sin(\omega)$ rad.

Αντίστοιχα και στα $\cos(\omega)$, $\tan(\omega)$, $\cot(\omega)$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών:

μοίρες	rad	sin(ω)	cos(ω)	tan(ω)	cot(ω)
0	0	0	1	0	δεν ορίζεται
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90°	$\pi/2$	1	0	δεν ορίζεται	0

Τριγωνομετρικοί αριθμοί (γενικότερα, όχι μόνο για οξείες γωνίες)



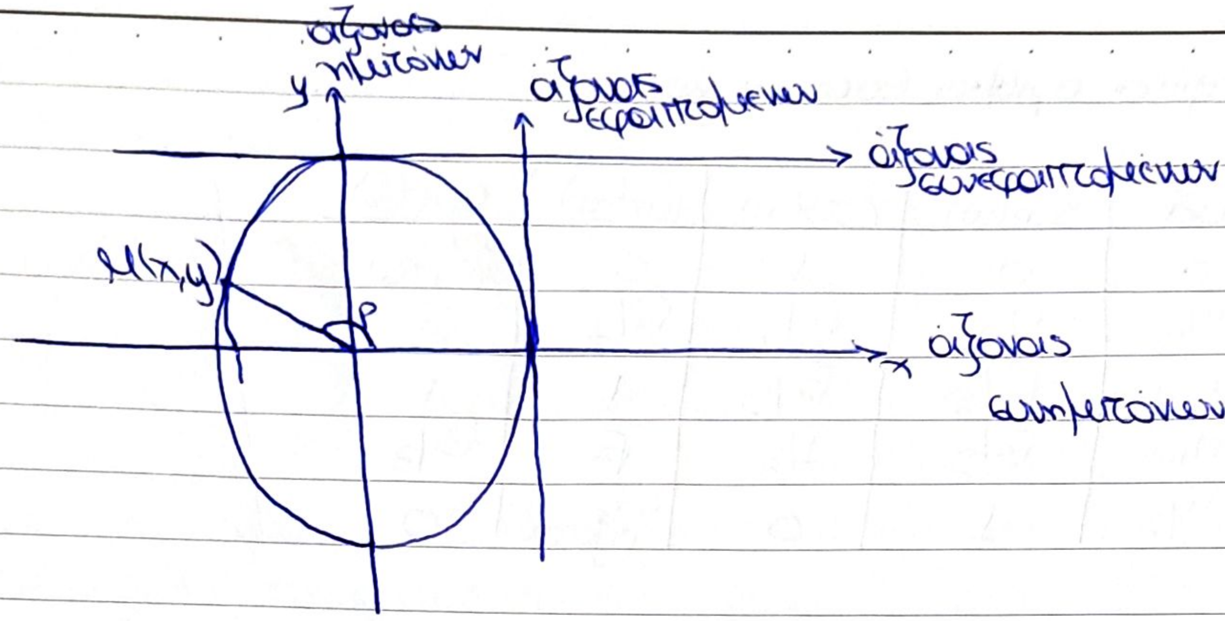
Θεωρούμε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνας 1.
Ξεκινώντας από το σημείο (1,0) κινούμαστε σε φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού (θετική φορά).

$\cos(\omega) = \alpha$

$\sin(\omega) = \beta$

$\tan(\omega) = \dfrac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0$

$\cot(\omega) = \dfrac{\alpha}{\beta}, \quad \beta \neq 0$



→ Βασικές Ιδιότητες

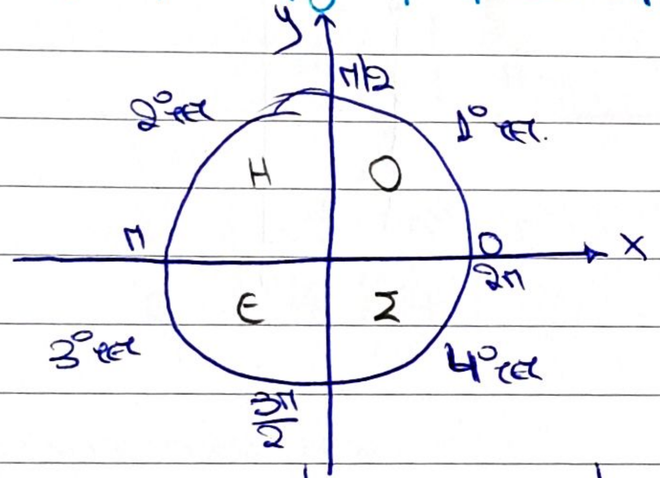
$-1 \leq \sin x \leq 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

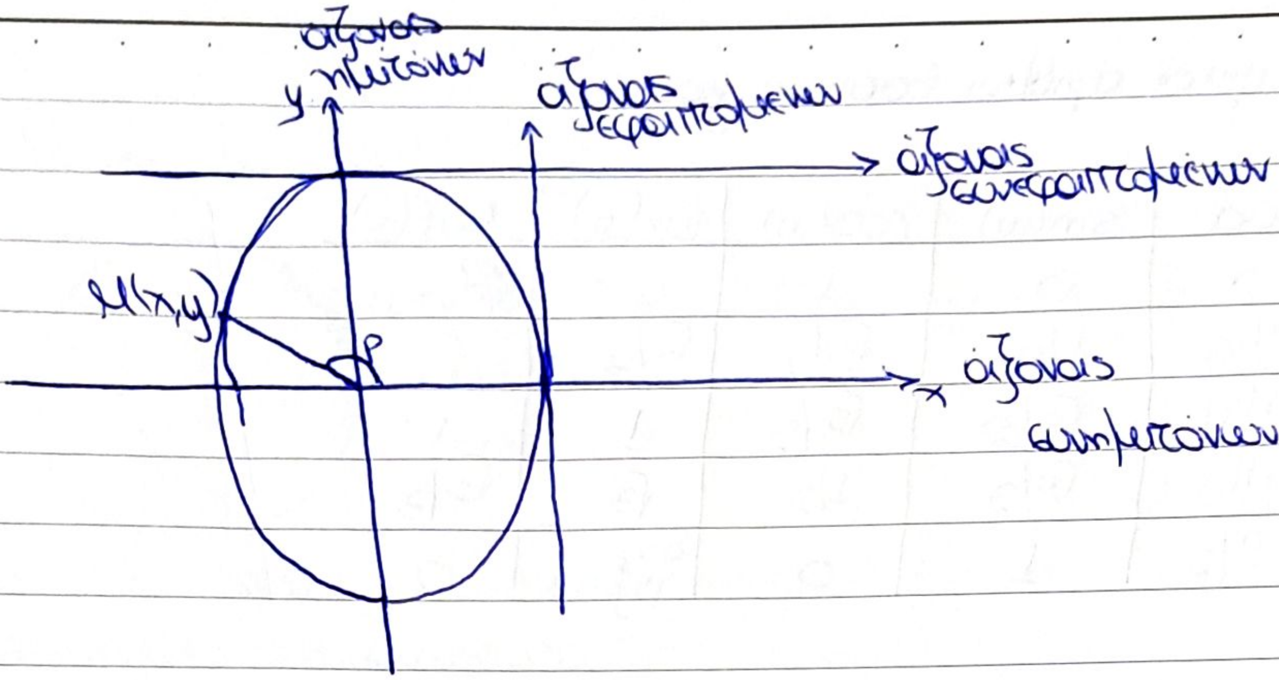
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\tan x \cdot \cot x = 1$

→ Πρόσημο Τριγωνομετρικών Αριθμών



	1° τεταρτ.	2° τεταρτ.	3° τεταρτ.	4° τεταρτ.
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tan	+	—	+	—
cot	+	—	+	—



→ Βασικές Ιδιότητες

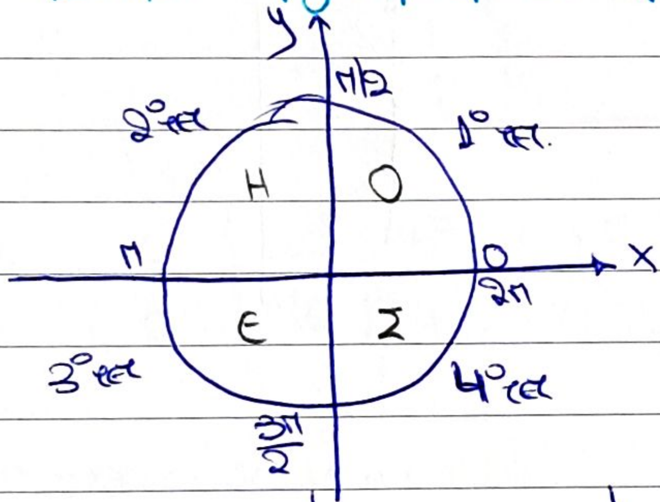
$-1 \leq \sin x \leq 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\tan x \cdot \cot x = 1$

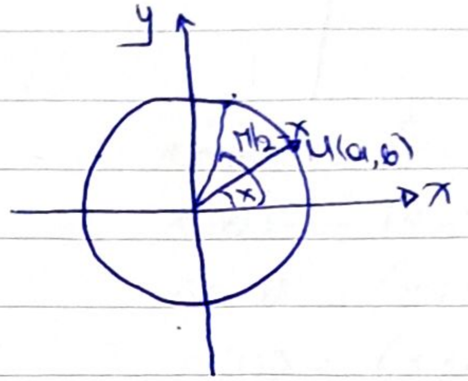
→ Πρόσημο Τριγωνομετρικών Αριθμών



	1° τεταρτ.	2° τεταρτ.	3° τεταρτ.	4° τεταρτ.
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

$\cos(x+2\pi) = \cos x$
$\sin(x+2\pi) = \sin x$
$\tan(x+2\pi) = \tan x$
$\cot(x+2\pi) = \cot x$

• Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Συμπληρωματικών Γωνιών



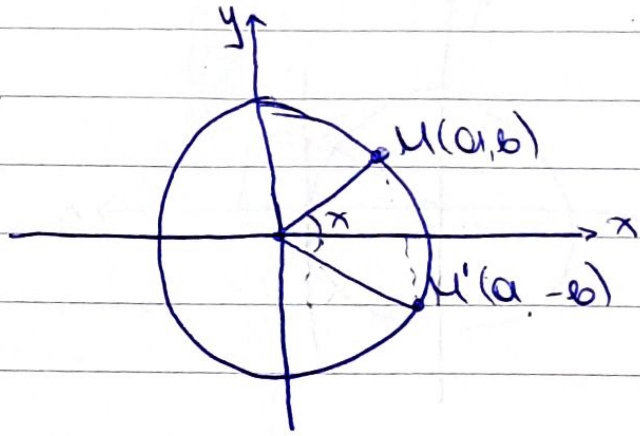
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot x$

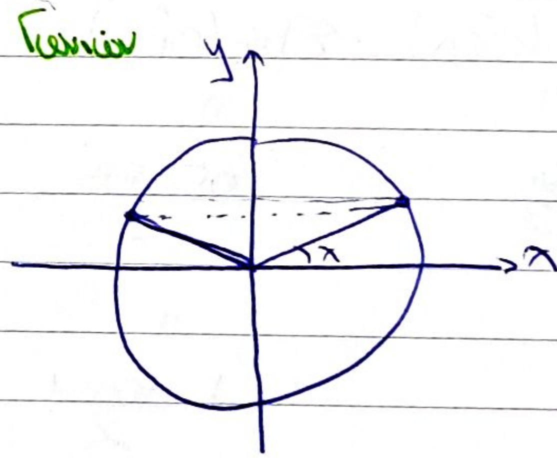
$\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan x$

• Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αντίθετων Γωνιών



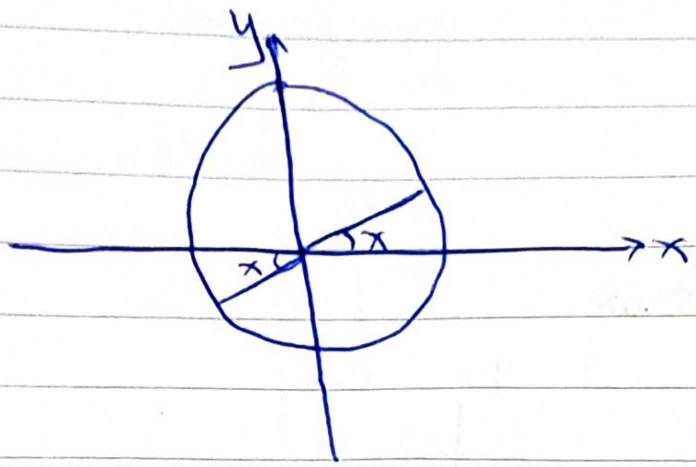
$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$
$\cot(-x) = -\cot x$

• Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Παραπληρωματικών Γωνιών



$\sin(\pi-x) = \sin x$
$\cos(\pi-x) = -\cos x$
$\tan(\pi-x) = -\tan x$
$\cot(\pi-x) = -\cot x$

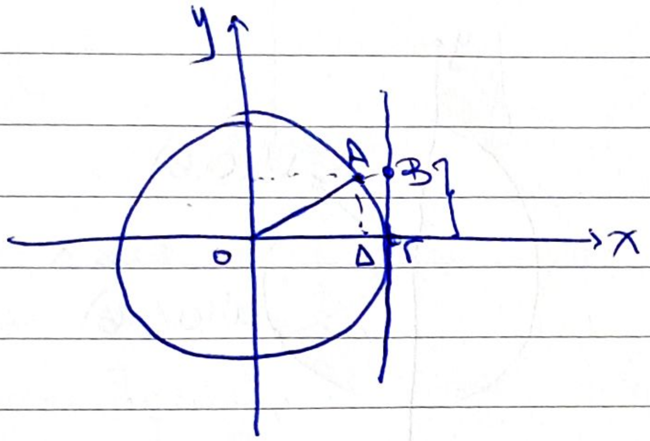
Γωνίες που διαφέρουν κατά π



$$\sin(\pi+x) = -\sin x$$
$$\cos(\pi+x) = -\cos x$$
$$\tan(\pi+x) = \tan x$$
$$\cot(\pi+x) = \cot x$$

· Για $0<\alpha<\pi/2$

$\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$



$$\text{Εμβ}(O\Gamma A) < \text{Εμβ}(O\hat{\Gamma}B)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ \frac{\alpha}{2} & & \frac{O\Gamma \cdot \Gamma B}{2} \\ & & \| \\ & & \frac{1 \cdot \tan\alpha}{2} \end{array}$$

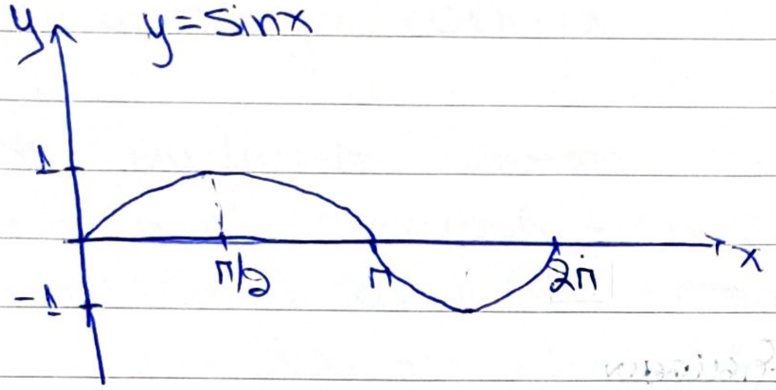
Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται περιοδική αν υπάρχει $T>0$ ώστε:
(i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $x \in A \Leftrightarrow x+T \in A$
(ii) Για κάθε $x \in A$ $f(x+T) = f(x)$

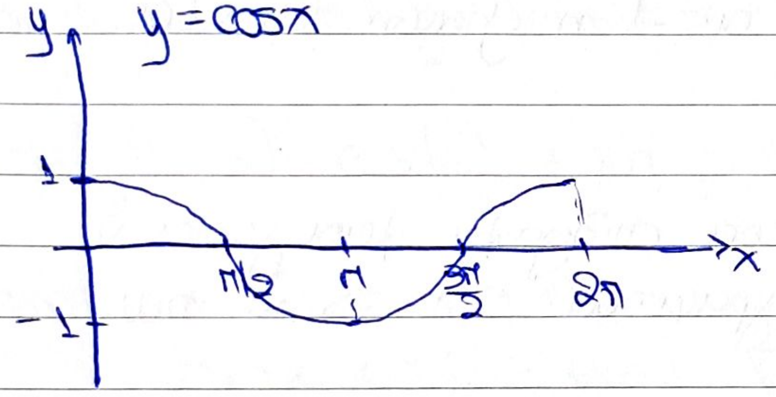
Εφόσον $\sin(x+2\pi) = \sin x$
$\cos(x+2\pi) = \cos x$

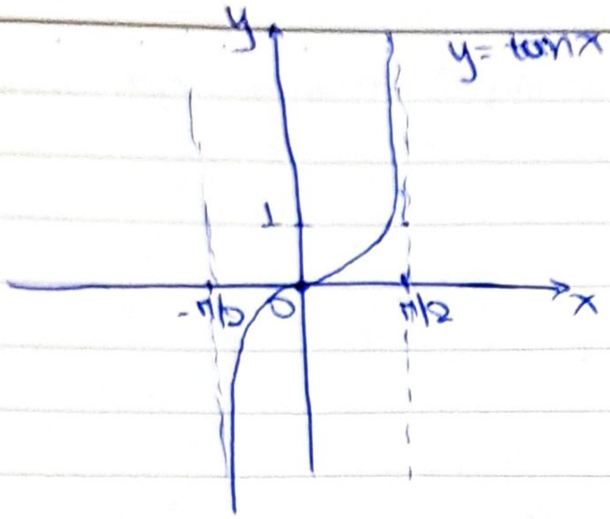
Οι sin, cos είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

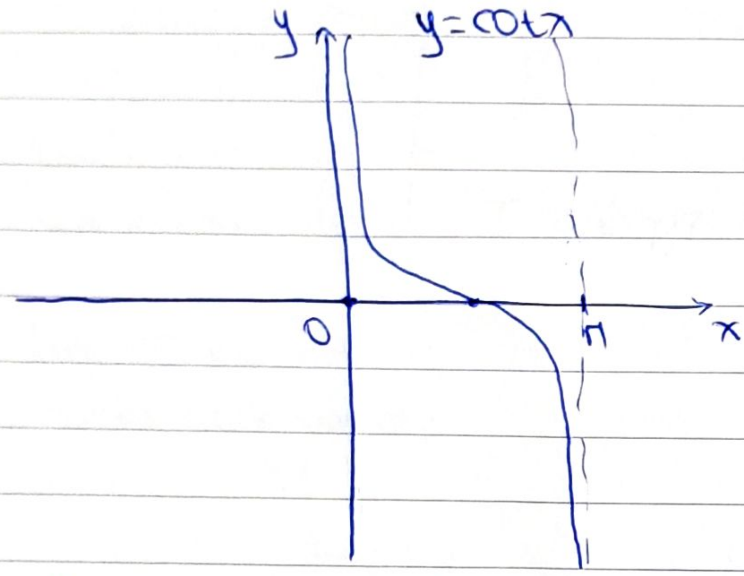
Εφόσον $\tan(x+\pi) = \tan x$
$\cot(x+\pi) = \cot x$

Οι tan, cot είναι περιοδικές με περίοδο π.









→ Λύσεις Βασικών Τριγωνομετρικών εξισώσεων.

• $\sin x = α$

- Αν $|α|>1$ δηλ. αν $α>1$ ή $α<-1$ η εξίσωση $\sin x = α$ είναι αδύνατη

- Αν $|α|<1$ δηλ. $-1 \le α \le 1$ τότε επιλέγουμε μια γωνία $θ$ ώστε $\sin θ = α$ και η εξίσωση γράφεται $\sin x = \sin θ$ που έχει λύσεις:

$$x = 2κπ + θ, \quad κ \in \mathbb{Z}$$
$$x = 2κπ + π - θ, \quad κ \in \mathbb{Z}$$

• $\cos x = a$
→ Αν $|a| > 1$ τότε αδύνατη
→ Αν $|a| \leq 1$ τότε επιλέγουμε θ ώστε $\cos\theta = a$
Η εξίσωση γράφεται $\cos x = \cos\theta$ και έχει λύσεις:
$$x = 2k\pi + \theta,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$x = 2k\pi - \theta,\ k \in \mathbb{Z}$$

• $\tan x = a$
Βρίσκουμε θ ώστε $\tan\theta = a$
Η εξίσωση γράφεται $\tan x = \tan\theta$ και έχει λύσεις:
$$x = k\pi + \theta,\ k \in \mathbb{Z}$$

Όμοια και για $\cot x = a$